Електротехнички факултет, Београд

ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2 - ТЕСТ

22. 8. 2020. год.	БРОЈ ИНДЕКСА: САЛА:
Сваки тачан одговор доноси 3 поена. Тест траје максимално **45** min.	ИМЕ И ПРЕЗИМЕ:

1. Израчунати неодређени интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.

$\int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-4x+4-4+3)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$

$= \boxed{\arcsin(x-2)+C}$

2. Израчунати одређени интеграл $\int_{-1}^{1} \underbrace{x^3 e^{x^2}}_{f(x)} dx$.

$f(-x) = (-x)^3 e^{(-x)^2} = -x^3 e^{x^2} = -f(x)$

$\int_{-1}^{1} x^3 e^{x^2} dx = 0$ (интеграл непарне ф-је на симетричном интервалу

3. Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' = y+1$.

$\frac{dy}{y+1} = dx$

$\ln|y+1| = x + C$

$y+1 = e^x \cdot c_1$

$\boxed{\text{o.p.} \quad y = e^x \cdot c_1 - 1}$

4. Дата је диференцијална једначина $y'' - y = 0$. Заокружити њено опште решење:

а) $y = C_1 e^x + 2C_2 e^{-x}$; **б)** $y = C_1 x + C_2 x e^x$;

в) $y = C_1 e^x + C_2 + C_3$; **г)** $y = C_1 + C_2 e^{-x}$;

(где су C_1, C_2 и C_3 произвољне реалне константе)

д) ниједна од претходних функција није опште решење дате диференцијалне једначине.

$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$

o.p. $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

5. Заокружити слова испред *дивергентних* редова:

а) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{4n^2-5}$; **б)** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{4n^2-5}$;

в) ниједан од претходно понуђених редова није дивергентан.

а) $\frac{n}{4n^2-5} \sim \frac{1}{4n}, n \to +\infty$

б) $\frac{\sqrt{n}}{4n^2-5} \sim \frac{1}{4n^{3/2}}, n \to +\infty$

6. Одредити ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 16 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$.

$\vec{v_1} = (1,2,4)$

$\vec{v_2} = 4\vec{v_1}$ $\quad$ rang A = 1

$\vec{v_3} = 3\vec{v_1}$

7. За које вредности реалног параметра a хомоген систем

$$ax + 2y = 0,$$
$$2x + (a+3)y = 0$$

има нетривијално решење.

хомоген систем има нетрив. решење ако је његова детерм. једн. нули.

$D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a+3 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 4 \Rightarrow \boxed{a \in \{-4, 1\}}$

8. Одредити сопствене вредности матрице $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

$\varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -1-\lambda+\lambda+\lambda^2$

$\varphi_B(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$

$\boxed{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1}$

9. Колико има петоцифрених бројева чије цифре припадају скупу $\{0,1,3,5,7,8,9\}$, таквих да се нула не налази ни на првом, ни на последњем месту и да се ниједна цифра не понавља.

$\underset{\uparrow}{\underline{6}} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} - \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underset{\uparrow}{\underset{0}{\underline{1}}} = 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \boxed{1800}$

$\{1,3,5,7,8,9\}$

завршавају се нулом

10. Дати су вектори $\vec{a} = (2, 0, -1)$ и $\vec{b} = (1, 3, 2)$. Одредити угао између њих.

$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}}$

Електротехнички факултет, Универзитет у Београду

ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2 — *22. 08. 2020. год.*

Број индекса:	***Име и презиме:***	***Сала:***
Сваки задатак носи 14 поена. Испит се ради максимално **75** min.	*1.* | *2.* | *3.* | *4.* | *5.* | **Сума**	***Оцена:***

1. [14] Израчунати интеграл $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^{x}}$.

Одговор:

$$I := \int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x} = \left\{ t=\frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2} \right\} = 2\int \frac{dt}{e^t+e^{2t}}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} s=e^t \\ ds = e^t dt \end{array} \right\} = 2\int \frac{ds}{s(s+s^2)} = 2\int \frac{ds}{s^2(1+s)}.$$

$$\frac{1}{s^2(1+s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{1+s} = \frac{(As+B)(1+s)+Cs^2}{s^2(1+s)}$$

$$\Rightarrow (As+B)(1+s)+Cs^2 = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} B=1 \\ C=1 \\ A=-1 \end{array}$$

$$I = -2\ln|s| - \frac{2}{s} + 2\ln|1+s| + C$$

$$\boxed{I = 2\ln\left|\frac{1+e^{x/2}}{e^{x/2}}\right| - \frac{2}{e^{x/2}} + C}$$

2. [14] Одредити опште решење диференцијалне једначине трећег реда $y''' + y'' = 1$.

Одговор:

$$\lambda^3+\lambda^2=0$$

$$\lambda^2(\lambda+1)=0$$

$$\lambda_{1,2}=0, \quad \lambda_3=-1$$

$$\boxed{y_H = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}}$$

$y''' + y'' = 1$, $0 = 0 + 0 \cdot i$ јесте корен кар. ј-не вишеструкости два

$$y_{p1} = Ax^2$$

$$y_{p1}' = 2Ax, \quad y_{p1}'' = 2A, \quad y_{p1}''' = 0$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y_{p1} = \frac{x^2}{2}}$$

$$\boxed{\text{О.Р. } y_{NH}(x) = y_H(x) + y_{p1} = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{x^2}{2}}$$

3. [14] Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4n)!}{(2n+1)!(n!)^2}$.

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{(4n+4)!}{(2n+3)!\cdot((n+1)!)^2}}{\dfrac{(4n)!}{(2n+1)!\,(n!)^2}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)\cancel{(4n)!}\,\cancel{(2n+1)!}\cdot\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(4n)!}\cdot(n+1)^2\cdot\cancel{(n!)^2}\,(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!}}$$

$L = \frac{4^4}{2^2} = 4^3 > 1 \Rightarrow$ полазни ред дивергира

Даламберов кр.

Одговор:

---

4. [14] Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$. Одредити карактеристичан полином и сопствене вредности матрице A.

$$c_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

развој по I колони

$c_A(\lambda) = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 9\right) = (1-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-9)$

$$\boxed{\begin{array}{l} c_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-8) \\ \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2 \end{array}}$$

← карактер. полином

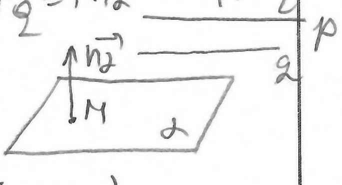
← сопствене вр.

Одговор:

---

5. [14] Дате су права $p: \frac{x-1}{2} = y-1 = \frac{z+1}{2}$, права $q: x+1 = \frac{y-1}{2} = z+1$ и тачка $M(1,1,2)$. Одредити раван α која је паралелна правама p и q и садржи тачку $M(1,1,2)$.

$\alpha \parallel p \wedge \alpha \parallel q \Rightarrow \vec{n_\alpha} \perp \vec{v_p} \wedge \vec{n_\alpha} \perp \vec{v_q} \Rightarrow \vec{n_\alpha} \parallel \vec{v_p} \times \vec{v_q}$



$$\vec{v_p} \times \vec{v_q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 0, 3)$$

$\vec{v_p} \times \vec{v_q} = (-3,0,3)$, $\vec{n_\alpha} \parallel \vec{v_p} \times \vec{v_q} \Rightarrow \vec{n_\alpha} = (-1,0,1)$

$M(1,1,2) \in \alpha$, $\vec{n_\alpha} = (-1,0,1)$

$\alpha: -(x-1) + 0\cdot(y-1) + 1\cdot(z-2) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha: -x+z-1=0}$

Одговор: